**Теорема 1** (критерий пересечения плоскостей). Пусть  и  ‑ плоскости. Тогда верно утверждение:

.

Доказательство.

«»

Пусть . Тогда , при этом  и, следовательно, .

«»

Предположим, что . Это значит, что  и  такие, что . Последнее равенство можно переписать в виде  или . Теперь нетрудно заметить, что точка  принадлежит как плоскости , так и плоскости , то есть .

**Следствие 1**. , где  ‑ одномерное векторное пространство, натянутое на вектор-мостик .

**Следствие 1’**. ,

где .

*(Разобрать на примере прямых и плоскостей в 3-х мерном пространстве)*

**Аффинная оболочка фигуры.**

Пусть  ‑ множество всех фигур в аффинном пространстве .

Для любой фигуры  всегда найдется -мерная плоскость , эту фигуру содержащая. Самой большой такой плоскостью является всё аффинное пространство .

Так как мы рассматриваем только конечномерные аффинные пространства, то . Это означает, что существует плоскость наименьшей размерности, содержащая . Пусть есть две такие плоскости . Несовпадение пересекающихся плоскостей влечет несовпадение их направляющих пространств  и . Следовательно

.

Тогда  ‑ также плоскость, содержащая , и при этом ее размерность меньше , что противоречит условию минимальности . Таким образом, для любой фигуры  существует единственная плоскость минимальной размерности, содержащая эту фигуру.

Эту плоскость мы будем называть **аффинной оболочкой фигуры**  и обозначать .

*Рассмотрим технику построения аффинной оболочки*.

**Теорема.** , где  линейная оболочка системы векторов .

Доказательство.

Прежде всего, заметим, что аффинная оболочка  – это плоскость, содержащая . Тогда, выбрав в качестве начальной точки , аффинную оболочку  можно задать так: .

Далее,  вектор . Таким образом, линейная оболочка  системы векторов  должна принадлежать :

,

То есть  «меньше», чем  быть не может.

С другой стороны, , следовательно, плоскость  уже содержит фигуру . Таким образом



и .

Пример 1 (аффинная оболочка пары плоскостей). Пусть , где  и  ‑ плоскости. Так как аффинная оболочка  содержит обе плоскости, то направляющее пространство должно содержать направляющие пространства обеих плоскостей, а значит, и их сумму . Вместе с тем, , так как  ‑ плоскость. Следовательно

.

Покажем теперь, что

.

Для этого, в силу , достаточно доказать включение

.

Если , то вектор  и, следовательно,

.

Если , то . Таким образом,  ‑ система векторов из векторного подпространства . Значит и линейная оболочка  этой системы, являясь минимальным векторным подпространством, содержащим эту систему, также принадлежит .

Заметим, что размерность  аффинной оболочки пары плоскостей является индикатором непустого их пересечения:



**Резюме:** Любые две плоскости  и либо пересекаются (имеют общие точки), либо не пересекаются. Плоскости пересекаются тогда и только тогда, когда . При этом  – плоскость размерности  с направляющим пространством .

**Определение 1.** Для пары плоскостей  четверку чисел , где , , , , будем называть **характеристикой** этой пары плоскостей.

Заметим, что, в характеристике  либо .

1. **Если** , то плоскости пересекаются по плоскости размерности . При этом,

а) условие  (соответственно ), определяет класс пар плоскостей, в которых первая плоскость содержится во второй (соответственно вторая плоскость содержится в первой),

б) условие  определяет класс пар совпадающих плоскостей,

в) условие  определяет класс пар, в которых ни одна плоскость не принадлежит другой и которые пересекаются по плоскости размерности . Если при этом  и , то плоскости будем называть взаимно дополняющими или трансверсальными.

1. **Если** , то плоскости не пересекаются, то есть . При этом,

а) плоскости, для которых  называют параллельными,

б) плоскости, для которых  называют частично параллельными (у каждой плоскости есть направления, общие с другой плоскостью, но есть и «независимые от другой» направления),

в) плоскости, для которых  называют скрещивающимися (плоскости не имеют общих направлений).

**Как могут располагаться плоскости в 3-х мерном аффинном пространстве (все возможные варианты)?**